

TD 1

Frédéric Blanqui

Exercice 26 Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

- (a) Etant donnés les mots $u = ab$ et $v = aba$, calculez uv , u^2 , u^3 et v^2 .
 - (b) Le mot-miroir de $x = x_1 \dots x_n$ est $x^R = x_n \dots x_1$. Calculez u^R et v^R .
 - (c) Donnez tous les préfixes du mot abc .
 - (d) Donnez tous les suffixes du mot abc .
 - (e) Donnez tous les facteurs du mot abc .
-

Exercice 28 Le mot-miroir d'un mot $u = a_1 \dots a_n$ est le mot $u^R = a_n \dots a_1$. Montrez que, pour tous mots u et v , $(uv)^R = v^R u^R$.

Exercice 29 Soient les langages $A = \{a, ba\}$ et $B = \{\varepsilon, b, aa\}$. Calculez AB , BA , A^2 et B^2 .

Exercice 30 Soient les langages $A = a^*b^*$, $B = \{a, b\}^*$, $C = (ab)^*$, $D = a^* \cup b^*$ et $E = \{ab, a\}^*$.

- (a) Déterminez si les mots suivants appartiennent à ces langages: a , b , aa , ab , ba , aab , $abab$ (on fera une table langage/mot).
 - (b) Quels langages sont égaux ou inclus l'un dans l'autre?
-

Exercice 32 Soit L un langage.

- (a) Peut-on avoir $L^* = \emptyset$?
 - (b) A quelle condition $L^+ = \emptyset$?
 - (c) A quelle condition $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$?
-

Exercice 37 Soit L un langage sur l'alphabet Σ .

- (a) Montrez que L^+ est le plus petit langage (pour l'inclusion) contenant L et clos par concaténation (si $u, v \in L^+$ alors $uv \in L^+$).
 - (b) Montrez que L^* est le plus petit langage contenant $L \cup \{\varepsilon\}$ et clos par concaténation.
-

Exercice 35 (a) Donnez une grammaire algébrique pour les entiers relatifs (en base 10) avec, au début éventuellement, un signe $+$ pour les entiers positifs ou nuls et des zéros inutiles. Ainsi, par exemple, $+02$ doit être accepté.

- (b) Donnez une grammaire algébrique pour les nombres en virgule flottante avec exposants (e.g. $+020.13e+4$).
-

Exercice 36 Donnez des grammaires pour les langages sur $\{a, b\}$ suivants:

- (a) Mots de longueur paire.
 - (b) Mots sans deux a consécutifs.
 - (c) Mots sans deux a ou deux b consécutifs.
 - (d) $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 - (e) $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leq n\}$.
 - (f) Palindromes (mots u égaux à leur mot-miroir u^R , où le mot-miroir de $a_1 \dots a_n$ est $a_n \dots a_1$).
-

Exercice 34 Soit L le langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ défini par les règles $L \rightarrow a \mid b \mid cL \mid dLL$.

- (a) Montrez que ca , dba et $cdccab$ sont dans L .
- (b) Trouvez tous les mots de L d'au plus 4 lettres.
- (c) Soit L_n l'ensemble des mots de L ayant n lettres. Trouvez une formule de récurrence définissant L_n à partir des ensembles L_k avec $k < n$.
- (d) En déduire un algorithme pour décider si un mot est dans L .
- (e) Montrez que $adccba$ et $cdbadc$ ne sont pas dans L .
- (f) Montrez que si $w_1 v_1 = w_2 v_2$ avec w_1 et w_2 dans L , alors $w_1 = w_2$ et $v_1 = v_2$. En déduire que si w est un mot de L alors aucun préfixe strict de w n'est dans L .