ENSIIE - Cours Langages et Systèmes Formels 1

$\boxed{\textbf{TD 1}}$

Frédéric Blanqui

Exercice 26 Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Etant donnés les mots $u = ab$ et $v = aba$, calculez uv, u^2, u^3 et v^2.

(b) Le mot-miroir de $x = x_1 \dots x_n$ est $x^R = x_n \dots x_1$. Calculez u^R et v^R.

(c) Donnez tous les préfixes du mot abc.

(d) Donnez tous les suffixes du mot abc.

(e) Donnez tous les facteurs du mot abc.

Solution.

(a) $uv = ababa$, $u^2 = abab$, $v^3 = ababab$, $v^2 = abaaba$.

(b) $u^R = ba$, $v^R = aba = v$.

(c) ε, a, ab, abc.

(d) ε, c, bc, abc.

(e) $\varepsilon, a, b, c, ab, bc, abc$. ■

Exercice 28 Le mot-miroir d'un mot $u = a_1 \dots a_n$ est le mot $u^R = a_n \dots a_1$. Montrez que, pour tous mots u et v, $(uv)^R = v^R u^R$.

Solution. Par récurrence sur la longueur de u. Si $u = \varepsilon$, c'est immédiat. Sinon, $u = ax$ et $(uv)^R = (axv)^R = (xv)^R a$. Par hypothèse de récurrence, $(xv)^R = v^R x^R$. Donc, $(uv)^R = v^R x^R a = v^R (ax)^R = v^R u^R$. ■

Exercice 29 Soient les langages $A = \{a, ba\}$ et $B = \{\varepsilon, b, aa\}$. Calculez AB, BA, A^2 et B^2.

Solution. $AB = \{a, ab, a^3, ba, bab, ba^3\}$.
$BA = \{a, ba, b^2a, a^3, a^2ba\}$.
$A^2 = \{a^2, aba, ba^2, baba\}$.
$B^2 = \{\varepsilon, b, aa, b^2, ba^2, a^2b, a^4\}$. ■

Exercice 30 Soient les langages $A = a^*b^*$, $B = \{a,b\}^*$, $C = (ab)^*$, $D = a^* \cup b^*$ et $E = \{ab, a\}^*$.

(a) Déterminez si les mots suivants appartiennent à ces langages: a, b, aa, ab, ba, aab, $abab$ (on fera une table langage/mot).

(b) Quels langages sont égaux ou inclus l'un dans l'autre?

Solution.

(a) o = oui, n = non

	a	b	aa	ab	ba	aab	$abab$
$A = a^*b^*$	o	o	o	o	n	o	n
$B = \{a,b\}^*$	o	o	o	o	o	o	o
$C = (ab)^*$	n	n	n	o	n	n	o
$D = a^* \cup b^*$	o	o	o	n	n	n	n
$E = \{ab, a\}^*$	o	n	o	o	n	o	o

(b) Tous les langages sont inclus dans B, $D \subseteq A$, $C \subseteq E$. ■

Exercice 32 Soit L un langage.

(a) Peut-on avoir $L^* = \emptyset$?

(b) A quelle condition $L^+ = \emptyset$?

(c) A quelle condition $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$?

Solution.

- Non, car L^* contient toujours le mot vide ε.
- Si $L = \emptyset$.
- Premièrement, $L^* - \{\varepsilon\} = (\bigcup_{i \geq 0} L^i) - L_0 = \bigcup_{i \geq 0}(L^i - L^0) = \bigcup_{i \geq 1}(L^i - L^0) \subseteq \bigcup_{i \geq 1} L^i = L^+$. Deuxièmement, $L^+ \subseteq L^*$ par définition. Maintenant, si $\varepsilon \in L$, alors $L^+ = L^*$. Sinon, $\varepsilon \notin L^+$ et $L^+ \subseteq L^* - \{\varepsilon\}$. Donc, $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ si $\varepsilon \notin L$. Autrement, $L^+ = L^*$. ■

Exercice 37 Soit L un langage sur l'alphabet Σ.

(a) Montrez que L^+ est le plus petit langage (pour l'inclusion) contenant L et clos par concaténation (si $u, v \in L^+$ alors $uv \in L^+$).

(b) Montrez que L^* est le plus petit langage contenant $L \cup \{\varepsilon\}$ et clos par concaténation.

Solution.

(a) L^+ contient L par définition. Montrons que L^+ est clos par concaténation. Soient $u, v \in L^+$. Par définition, il existe p et q tels que $u \in L^p$ et $v \in L^q$. Ainsi, $uv \in L^{p+q} \subseteq L^+$.

Montrons maintenant que L^+ est le plus petit langage contenant L et clos par concaténation. Soit M un langage contenant L et clos par concaténation. Alors $L^+ \subseteq M$. Donc tout langage contenant L et clos par concaténation contient L^+. Donc, L^+ est le plus petit langage contenant L et clos par concaténation.

(b) La preuve est similaire. ■

Exercice 35 (a) Donnez une grammaire algébrique pour les entiers relatifs (en base 10) avec, au début éventuellement, un signe + pour les entiers positifs ou nuls et des zéros inutiles. Ainsi, par exemple, +02 doit être accepté.

(b) Donnez une grammaire algébrique pour les nombres en virgule flottante avec exposants (e.g. +020.13e+4).

Solution.

(a) $E \to SN$, $S \to + \mid - \mid \varepsilon$, $N \to D \mid DN$, $D \to 0 \mid \ldots \mid 9$.

(b) $F \to E.NeE$. ■

Exercice 36 Donnez des grammaires pour les langages sur $\{a, b\}$ suivants:

(a) Mots de longueur paire.

(b) Mots sans deux a consécutifs.

(c) Mots sans deux a ou deux b consécutifs.

(d) $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(e) $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leq n\}$.

(f) Palindromes (mots u égaux à leur mot-miroir u^R, où le mot-miroir de $a_1 \ldots a_n$ est $a_n \ldots a_1$).

Solution.

(a) $P \to \varepsilon \mid LI$, $L \to a \mid b$, $I \to LP$.

(b) $S \to \varepsilon \mid aB \mid bS$, $B \to \varepsilon \mid bS$.

(c) $S \to \varepsilon \mid aB \mid bA,\ B \to \varepsilon \mid bA,\ A \to \varepsilon \mid aB$.

(d) $S \to \varepsilon \mid aSb$.

(e) $S \to B \mid aSb,\ B \to \varepsilon \mid bB$.

(f) $S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$. ■

Exercice 34 Soit L le langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ défini par les règles $L \to a \mid b \mid cL \mid dLL$.

(a) Montrez que ca, dba et $cdccab$ sont dans L.

(b) Trouvez tous les mots de L d'au plus 4 lettres.

(c) Soit L_n l'ensemble des mots de L ayant n lettres. Trouvez une formule de récurrence définissant L_n à partir des ensembles L_k avec $k < n$.

(d) En déduire un algorithme pour décider si un mot est dans L.

(e) Montrez que $adccba$ et $cdbadc$ ne sont pas dans L.

(f) Montrez que si $w_1 v_1 = w_2 v_2$ avec w_1 et w_2 dans L, alors $w_1 = w_2$ et $v_1 = v_2$. En déduire que si w est un mot de L alors aucun préfixe strict de w n'est dans L.