ENSIIE - Cours Langages et Systèmes Formels 1

TD 3

Frédéric Blanqui

Exercice 48 Eliminer les ε-transitions de l'automate suivant:

		a	b	ε
I	0	1		2
	1		2	4
	2	3		4
F	3		0	
F	4	2	3	

Solution. On calcule la clôture avant.

(1) On calcule les ε-réduits de chaque état: $0 \xrightarrow{\varepsilon} 2 \xrightarrow{\varepsilon} 4$ et $1 \xrightarrow{\varepsilon} 4$.

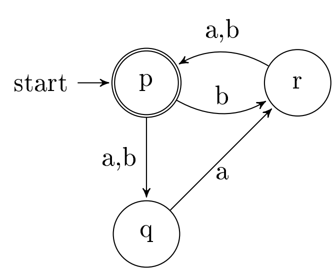
(2) On rajoute dans les états initiaux tous les réduits d'un état initial. Ici, on obtient $0, 2, 4$ initiaux.

(3) On rajoute $p \xrightarrow{x} q'$ pour toute transition $p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{\varepsilon}{}^{*} q'$, et on élimine toutes les ε-transitions:

		a	b
I	0	14	
	1		24
I	2	3	
F	3		024
IF	4	24	3

■

Exercice 16 Déterminisez l'automate suivant:

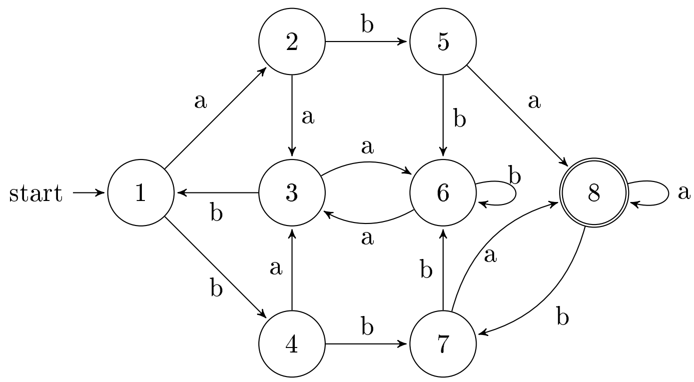


Solution. On construit la table des transitions:

	p	q	r	qr	pr	pq	pqr
a	q	r	p	pr	pq	qr	pqr
b	qr		p	p	pqr	qr	pqr

L'automate déterministe ainsi obtenu a même état initial p et pour états finaux les états contenant l'état final p, soit: p, pr, pq, pqr.

Exercice 15 Minimisez l'automate suivant:



Solution. On écrit la table de transition:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	2	3	6	3	8	3	8	8
b	4	5	1	7	6	6	6	7

On raffine les classes d'équivalence jusqu'à atteindre un point fixe.

D'abord, on a 2 classes d'équivalence: la classe $A = \{8\}$ des états finaux et la classe $B = \{1, \ldots, 7\}$ des états non-finaux. On remarque que A est un singleton et ne peut donc pas être raffiné davantage. On regarde maintenant les transitions à partir de B:

	1	2	3	4	5	6	7
a	B	B	B	B	A	B	A
b	B	B	B	B	B	B	B

On voit que, si on lit b, on reste dans B, et si on lit a, on va dans B si on est dans $C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, et on va dans A si on est dans $D = \{5, 7\}$. Les transitions pour 5 et 7 étant identiques, on ne peut pas raffiner D davantage. On regarde maintenant les transitions à partir de C:

	1	2	3	4	6
a	C	C	C	C	C
b	C	D	C	D	C

On voit que, si on lit a, on reste dans C, et si on lit b, on va dans C si on est dans $E = \{1, 3, 6\}$, et on va dans D si on est dans $F = \{2, 4\}$. On regarde maintenant les transitions à partir de E:

	1	3	6
a	F	E	E
b	F	E	E

On voit que, si on lit a, on va dans F si on est dans $G = \{1\}$, et on va dans E si on est dans $H = \{3, 6\}$. On regarde maintenant les transitions à partir de H:

	3	6
a	H	H
b	G	H

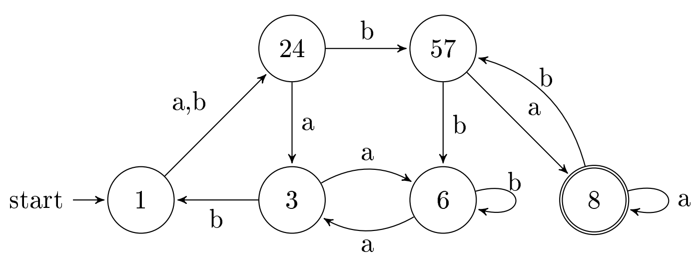
On voit que, si on lit b, on va dans G si on est dans $I = \{3\}$, et on va dans H si on est dans $J = \{6\}$. I et J étant des singletons, on ne peut pas les raffiner davantage.

Finalement, on regarde les transitions à partir de F:

	2	4
a	I	I
b	D	D

Il n'y a pas de différences entre les états. On obtient donc les classes d'équivalence suivantes: $A = \{8\}$, $D = \{5, 7\}$, $G = \{1\}$, $I = \{3\}$, $J = \{6\}$, $F = \{2, 4\}$.

En fusionnant les états équivalents, on obtient:



Exercice 50 Donnez un automate pour le complémentaire de $(a + ab)^*$.

Solution.

(1) On construit d'abord un automate déterministe reconnaissant $(a + ab)^*$:

	1	2
a	2	2
b		1

états initiaux: 1 états finaux: 1,2

(2) On le complète:

	1	2	3
a	2	2	3
b	3	1	3

états initiaux: 1   états finaux: 1,2

(3) On prend le complémentaire:

	1	2	3
a	2	2	3
b	3	1	3

états initiaux: 1   états finaux: 3

■

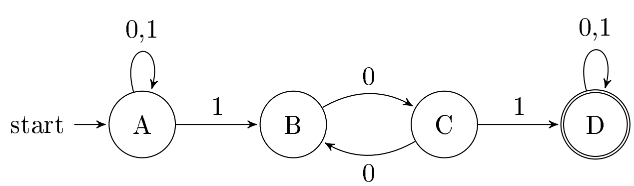
Exercice 19 (a) Définir un automate non-déterministe à 4 états dont le langage reconnu L est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ contenant le mot 10^n1 où n est impair.

(b) Construire à partir de l'automate précédent un automate déterministe à 5 états dont le langage reconnu L' est le complémentaire de L.

(c) Construire un automate déterministe minimal reconnaissant L'. Montrer qu'il est bien minimal.

Solution.

(a)



Soit, sous forme d'une table:

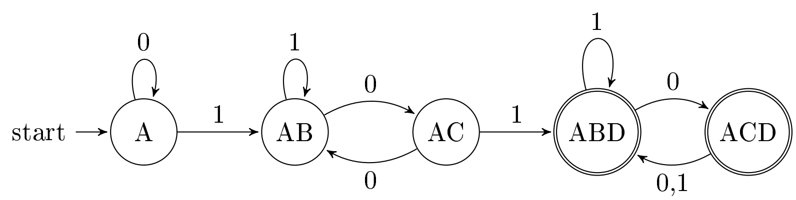
	A	B	C	D
0	A	C	B	D
1	AB		D	D

(b) Pour calculer le complémentaire, il faut d'abord déterminiser l'automate précédent. Pour cela, on calcule la table de transition de l'automate des parties:

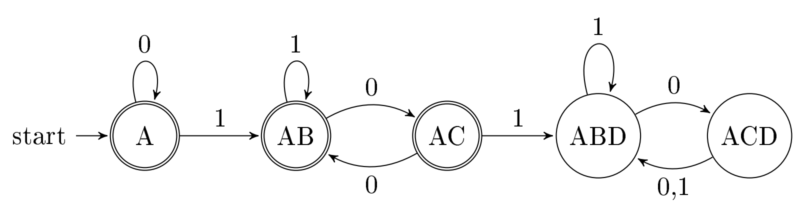
	A	AB	AC	ABD	ACD
0	A	AC	AB	ACD	ABD
1	AB	AB	ABD	ABD	ABD

L'automate déterministe ainsi obtenu a même état initial A et pour états finaux les états contenant l'état final D, soit: ABD et ACD.

Sous forme graphique, on obtient:



Maintenant, cet automate étant complet, on obtient l'automate complémentaire en prenant comme états finaux tous les états qui ne sont pas finaux dans l'automate précédent, soit:



(c) On minimise l'automate précédent en calculant les classes d'équivalence successives jusqu'à atteindre un point fixe:

Au départ, il y a deux classes d'équivalence formées par les états finaux d'une part et les états non-finaux d'autre part:

$$Q/\simeq_0 = \{\text{a,b}\} \text{ où a} = \{\text{A,AB,AC}\} \text{ et b} = \{\text{ABD,ACD}\}$$

Ensuite, pour chaque état et chaque lettre, on regarde dans quelle classe on aboutit:

	A	AB	AC	ABD	ACD
0	a	a	a	b	b
1	a	a	b	b	b

On voit qu'un état de b reste dans b: on peut donc fusionner tous les états de b. Par contre, AC peut aller dans b tandis que A et AB restent dans a. On peut donc raffiner a de la manière suivante:

$$Q/\simeq_1 = \{\text{b,c,d}\} \text{ où b} = \{\text{ABD,ACD}\},\ \text{c} = \{\text{A,AB}\} \text{ et d} = \{\text{AC}\}$$

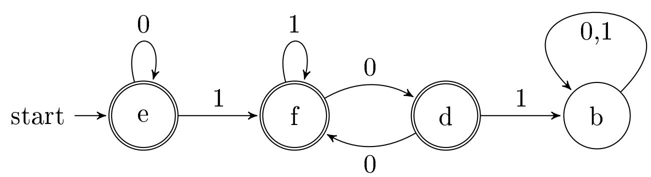
Maintenant, on regarde les transitions des états de c:

	A	AB
0	c	d
1	c	c

Ainsi, on obtient:

$Q/\simeq_2$ = {b,d,e,f} où b = {ABD,ACD}, d = {AC}, e = {A} et f = {AB}

qu'on ne peut pas raffiner davantage. L'automate minimale est donc:



■

Exercice 45 Trouvez un automate reconnaissant le langage des mots binaires contenant à la fois 001 et 11.

Solution. Il est facile de définir des automates non-déterministes pour chacun de ces langages. Le langage des mots contenant 001 est reconnu par l'automate A:

	a	b	c	d
0	a, b	c		d
1	a		d	d

Le langage des mots contenant 11 est reconnu par l'automate B:

	e	f	g
0	e		g
1	e, f	g	g

Nous construisons maintenant l'automate produit:

	ae	be	ce	de	af	bf	cf	df	ag	bg	cg	dg
0	ae, be	ce		de					ag, bg	cg		dg
1	ae, af		de, df	de, df	ag		dg	dg	ag		dg	dg

L'état initial est ae et l'état final dg.

Une autre manière de procéder est:

(1) Déterminiser A en A_1.

(2) Compléter A_1 en A_2 (ajout d'un état puit).

(3) Soit A_3 le complémentaire de A_2 (inversion des états initiaux et finaux).

(4) Déterminiser B en B_1.

(5) Compléter B_1 en B_2.

(6) Soit B_3 le complémentaire de B_2.

(7) Soit C l'automate union de A_3 et B_3.

(8) Déterminisez C en C_1.

(9) Compléter C_1 en C_2.

(10) Soit enfin C_3 le complémentaire de C_2. ■

Exercice 5 Montrer que $L = \{a^p | p \text{ premier}\}$ n'est pas reconnaissable par un automate.

Exercice 2 Montrer que, si L est reconnaissable, alors le langage miroir $L^R = \{a_n \dots a_1 \in \Sigma^* \mid a_1 \dots a_n \in L\}$ est également reconnaissable.

Exercice 3 Montrer que si L est un langage reconnaissable sur l'alphabet Σ, alors $\{u \in \Sigma^* \mid u^2 \in L\}$ est aussi reconnaissable.

Solution. Soit $A = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ un automate reconnaissant L. Si $uu \in L$, alors il existe $p, q \in Q$ tels que $i \xrightarrow{u} p \xrightarrow{u} f$, $i \in I$ et $f \in F$. Autrement dit, u est reconnu à partir de i, mais aussi à partir de p. Soit alors l'automate $A_p = (Q^2, \Sigma, \Delta', \{(i,p) \mid i \in I\}, \{(p,f) \mid f \in F\})$ où $\Delta' = \{((p_1,p_2), a, (q_1,q_2)) \mid (p_1, a, q_1) \in \Delta, (p_2, a, q_2) \in \Delta\}$ qui consiste à exécuter deux copies de A en parallèle, l'une en partant d'un état initial et l'autre en partant de p. Soit enfin A' l'automate reconnaissant $\bigcup_{p \in Q} L(A_p)$. Si $u \in L(A')$, alors il existe $p \in Q$ tel que $u \in L(A_p)$, c'est-à-dire, il existe $i \in I$ et $f \in F$ tel que $(i,p) \xrightarrow{u} (p,f)$. Donc, $i \xrightarrow{u} p \xrightarrow{u} f$ et $u^2 \in L$. Autrement dit, $u \in \{u \in \Sigma^* \mid uu \in L\}$. ■